ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2026

Εξεταζόμενο μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού**
Ημερομηνία: **03 – 06 – 2026**
Ώρα ανάρτησης: **12:10**

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ
Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 133
Α2. Σχολικό σελίδα 52
Α3. Σχολικό σελίδα 185
Α4. α)Λάθος β)Σωστό γ)Σωστό δ)Σωστό ε)Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$f\colon (2,+\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2\ln(x-1)$
$g\colon [2,+\infty) \to \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{x-2}+1$

Β1.

$$A_h = A_{f\circ g} == \{x \in [2,+\infty) / \sqrt{x-2}+1 \in (1,+\infty)\}$$

Θα πρέπει $\sqrt{x-2}+1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0$, που ισχύει για κάθε $x > 2$
άρα $\mathrm{A}_h = (2,+\infty)$ με τύπο

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}+1-1\big) = 2\ln\big(\sqrt{x-2}\big) = \ln\sqrt{x-2}^{\,2}$$
$$= \ln(x-2)\,,\ x > 2$$

Β2.

Η h συνεχής στο $(2,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ για $x > 2$

άρα η $h \nearrow$ στο $(2,+\infty)$ δηλ. και ‘1-1’ άρα αντιστρέφεται

$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Άρα $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$ ισχύει πάντα

άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$

Β3.

$$\lim_{x\to 2} h(x)\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \ln(x-2)\frac{2\ln(x-1)}{x-2} (*)$$

$$\lim_{x\to 2} \ln(x-2) \overset{u=x-2}{=} \lim_{u\to 0} lnu = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} \underset{DHL}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Άρα το όριο υπάρχει και είναι $L = (-\infty)\cdot 2 = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Αφού η $y = x$ εφάπτεται στη C_f στο $(0{,}0)$ σημαίνει $f(0) = 0$ και $f'(0) = \lambda = 1$

Επίσης αφού η έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ θα πρέπει

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \kappa \lim_{x\to +\infty} x$

- Αν $\kappa > 0$: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, άτοπο
- Αν $\kappa < 0$: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$,άτοπο

άρα $\kappa = 0$

Τότε $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$ με $f'(x) = \frac{\mu(x^2+1)-\mu x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$

με $f'(0) = \mu$ άρα $\mu = 1$

Γ2.

$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1}$ $\mathrm{Af} = \mathbb{R}$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

i) $f'(x) = \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Το $(x^2+1)^2 > 0$ άρα

$f'(x) > 0 \Rightarrow -x^2+1 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

και $f'(x) < 0 \Rightarrow -x^2+1 < 0 \Rightarrow x > 1$ ή $x < -1$

Ακολουθεί το πινακάκι μονοτονίας

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Άρα $f \searrow$ στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$

$f \nearrow$ στο $[-1, 1]$

Με τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = \frac{-1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Σύμφωνα με τον πίνακα μονοτονίας :

Έστω $A_1 = (-\infty, -1]$, $f \searrow$ εκεί , άρα $f(A_1) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} \right)$, όπου $f(-1) = -\frac{1}{2}$

και $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ άρα $f(A_1) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

$A_2 = [-1,1]$, $f \nearrow$, άρα $f(A_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ και

$A_3 = [1,+\infty)$, $f \searrow$, άρα $f(A_3) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]$ όμως $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

άρα $f(A_3) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Επίσης : $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Αν $\alpha \neq 0$ το $\frac{1}{2} + a^2 \notin f(A)$ δηλαδή η $f(x) = \frac{1}{2} + a^2$ αδύνατη

Αν $\alpha = 0$ τότε $f(x) = \frac{1}{2}$ αληθεύει μόνο για $x = 1$, άρα η εξίσωση έχει 1 λύση

Γ3.

i)

Για $\nu \in \mathbb{N}$ ορίζω

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$$

Ν.δ.ο $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$

Έχω: $\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx =$
$\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1+1}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+2}\right]_0^1 =$

$$\frac{1^{2\nu+2}}{2\nu+2} - 0 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii)

$$I_o = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}[ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2}ln2$$

$$u = x^2+1 \longrightarrow du = 2xdx$$

$$\text{Για } x = 0 \longrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \longrightarrow u = 2$$

$$I_o + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + ln2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

παραγωγίσιμη με συνέχη g' ,

και $g'(x) \neq -1$

Θεωρώ $h(x) = g(x) + x$, $x \epsilon \mathbb{R}$
•η $h(x)$ συνεχής στο [-1,0]
•$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$
αφού $0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow g(-1) - 1 < 0$

Άρα $h(-1)h(0) < 0$
Και από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \epsilon (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$
δηλαδή $g(x_1) + x_1 = 0$
Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$
Όμως η h' συνεχής (αφού g' συνεχής) άρα η h' διατηρεί πρόσημο .
Αν $h'(x) > 0$ τότε η $h \nearrow$ άρα το x_1 είναι μοναδικό
Αν $h'(x) < 0$ τότε η $h \searrow$ άρα το x_1 είναι μοναδικό
Δηλαδή σε κάθε περίπτωση υπάρχει μοναδικό $x_1 \epsilon (-1,0)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$

(Κάνοντας Θ.Μ.Τ για την h στο [-1,0] μπορώ να δείξω ότι $h'(x) > 0$ δηλαδή η $h \nearrow$ που θα μας φανεί χρήσιμο για παρακάτω ερώτημα)

Δ2.

Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x)\ ,\ x\epsilon(-\infty,0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx\ ,\ x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Η παραγωγίσιμη άρα

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \frac{kx}{x}\right) = 2\cdot 1 + 1 - k = 3 - k$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Άρα $3 - k = 0 \Leftrightarrow\ k = 3$

Δ3.

Η f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$ με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0$ θέτουμε $\underline{\omega = \sigma\upsilon\nu x}$ άρα

$2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = 0$

Αφού ω = συνx ∈ (0,1) για $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ έχω ότι $f'(x) > 0$ άρα η $f \nearrow$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ άρα $f(x) \geq f(0)$ δηλαδή $f(x) \geq 0$

Η $f \nearrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] = \Delta$ άρα

$$f(\Delta) = \left[f(0),\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0,+\infty)$$

αφού $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} εφx = +\infty$

άρα το $\frac{\pi}{3} \in f(\Delta)$ δηλ. υπάρχει $x_2 \in (0,\frac{\pi}{2})$ τ.ω. $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$ και η $f \nearrow$ άρα x_2 μοναδικό

Δ4.

i) Από το **Δ1** γνωρίζουμε ότι $x_1 \in (-1,0)$ τ.ω. $g(x_1) + x_1 = 0$

$x > x_1 \Rightarrow h(x) > h(x_1) \Rightarrow h(x) > 0$ άρα $g(x) + x > 0$

και $x^2 \geq 0$ $x \in [x_1, 0]$

$x^2(g(x) + x) \geq 0$, $x \in [x_1, 0]$ δηλαδή $f(x) \geq 0$

ii)

Επειδή $f(x) \geq 0$ για $x \in \left[x_1,\ \frac{\pi}{3}\right]$ άρα γνωρίζω ότι:

$\int_{x_1}^{0}|f(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx$ (1)

Όμως:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)dx =$$

$-x_1^3 g(x_1) - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx$ (2)

$$\int_{x_1}^{0}|f(x)|dx = \int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}$$

$= \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \frac{x_1^4}{4}$ (3)

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(2ημx + εφx - 3x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} ημx dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} εφx dx -$

$3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx = 2[-συνx]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{ημx}{συνx}dx - 3\left[\frac{x^2}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(-συν\,\frac{\pi}{3} + συν0\right) -$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-ημx}{συνx}dx - \frac{3}{2}\cdot\ \frac{\pi^2}{9} = -1 + 2 - [\ln|συνx|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\cdot\ \frac{\pi^2}{2} =\ 1 + \ln 2 - \frac{1}{3}\cdot\ \frac{\pi^2}{2}$

Από την (1) έχω:

$$\int_1^0 x^2 g(x) - \frac{{x_1}^4}{4} = 1 + ln2 - \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_1^0 x^2 g(x) = \frac{{x_1}^4}{4} + 1 + ln2 - \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{2}$$

Αντικαθιστώ στην (2) κι έχω

$$\int_1^0 x^3 g'(x)dx = -{x_1}^3 g(x_1) - \frac{3{x_1}^4}{4} - 3 - 3ln2 + \frac{\pi^2}{2}$$

$$= -{x_1}^3(-x_1) - \frac{3{x_1}^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3ln2 - 3$$

$$= \frac{{x_1}^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3ln2 - 3$$